A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

PPI 2r., sem. letni

LISTA 2

Wrocław, 13 października 2008

Definicje

1) Podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest *ograniczony*, jeśli jest on zawarty w pewnej kuli (o jakimś środku $x \in X$ i jakimś promieniu $r \in (0, \infty)$).

2) Funkcja $f : X \to Y$ z jednej przestrzeni metrycznej (X, d) do drugiej (Y, e) jest *jednostajnie ciągła* jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

3) Funkcja $f : X \to Y$ z jednej przestrzeni metrycznej do drugiej jest *homeomorfizmem* jeśli jest ona odwracalna (czyli różnowartościowa i ,,na"), ciągła i odwrotna do niej też jest ciągła.

4) Funkcja $f : X \to Y$ z jednej przestrzeni metrycznej do drugiej jest *jednostajnym homeomorfizmem*, jeśli jest homeomorfizmem, jest jednostajnie ciągła i odwrotna do niej jest też jednostajnie ciągła.

5) Funkcja $f : (X, d) \to (Y, e)$ z jednej przestrzeni metrycznej w drugą jest *izometrią* jeśli $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$ dla dowolnych $x, y \in X$. Oczywiste jest, że każda izometria jest jednostajnie ciągła i różnowartościowa. Jeśli izometria jest ,,na", to jest homeomorfizmem. (Prosze te oczywistości sprawdzić!) Dwie przestrzenie metryczne nazywamy *izometrycznie homeomorficznymi* jesli istnieje izometria $f : X \to Y$, która jest ,,na".

6) Własność Φ przestrzeni metrycznej (X, d) nazywa się *topologiczna* jeśli ma ją każda przestrzeń homeomorficzna z (X, d). Własność Ψ nazywa się *jednostajnie topologiczna* jeśli ma ją każda przestrzeń jednostajnie homeomorficzna z (X, d). Własność Ψ nazywa się *metryczna* jeśli ma ją każda przestrzeń izometrycznie homeomorficzna z (X, d).

Uwaga

Niech w X dane będą dwie metryki d i d'. Jeśli są one równoważne (jednostajnie równoważne), to funkcja tożsamościowa jest hoemomorizmem (jednostajnym homeomorfizmem) pomiędzy (X, d) a (X, d').

Na odwrót, jeśli $f : (X, d) \to (Y, e)$ jest homeomorfizmem (jednostajnym homeomorfizmem), to metryka d' w X ,,przeniesiona" z Y wzorem $d'(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2))$ jest równoważna (jednostajnie równoważna) z metryką d.

Obie (tak naprawdę to cztery) powyższe implikacje są *de facto* równoważnościami.

ZADANIE -2. Udowodnij, że suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, podobnie jak i przekrój skończenie wielu zbiorów otwartych. Analogicznie, przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, podobnie jak i suma skończenie wielu zbiorów domkniętych.

ZADANIE -1. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Udowodnij, że A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek: jeśli (x_n) jest ciągiem elementów zbioru A i $\lim x_n = x_0$ (w (X, d)), to $x_0 \in A$.

ZADANIE 0. Zbadaj ciągłość i jednostajną ciągłość, bycie homeomorfizmem lub jednostajnym homeomorfizmem z jej obrazem, funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ na dziedzinach:
(a) $\mathbb{R} \setminus 0$,
(b) $(1, \infty)$,
(c) $(0, 1)$,
(d) $(1, 100)$.

ZADANIE 1. Wykaż, że ograniczoność całej przestrzeni jest własnością metryczną. Wskazać przykłady, że nie nie jest to własność topologiczna ani nawet jednostajnie topologiczna.

ZADANIE 2. Wykaż, że każdy ciąg podstawowy jest ograniczony.

ZADANIE 3. Wykaż, że funkcja jednostajnie ciągła przeprowadza ciągi podstawowe w podstawowe.

ZADANIE 4. Wykaż, że zupełność jest własnością jednostajnie topologiczną ale nie topologiczną.

ZADANIE 5. Podaj przykład na to, że obraz przestrzeni zupełnej przez hoemomorfizm jednostajnie ciągły (ale taki, że odwrtony jest tylko ciągły (nie jednostajnie)) nie musi być zupełny.

ZADANIE 6. Wykaż, że podprzestrzeń Y przestrzeni zupełnej X jest zupełna wtedy i tylko wtedy, Y gdy jest podzbiorem domkniętym w X (robiliśmy na wykładzie).

ZADANIE 7. Wykaż, że podzbiór $G \subset X$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego podzbioru otwartego $U \subset X$, $U \cap G \neq \emptyset$. (po następnym wykładzie)

ZADANIE 8. Czy płaszczyzna z usuniętym kołem otwartym jest homeomorficzna z kołem domkniętym z usuniętym środkiem? (Można zastosować pewną funkcję zespoloną). Czy przestrzenie te są może jednostajnie homeomrficzne?

ZADANIE 9. Wykaż, że przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niej przeliczalna rodzina kul, taka że w każdej kuli jest zawarta kula z tej rodziny. (po następnym wykładzie)

ZADANIE 10. Wykaż, że dowolna podprzestrzeń przestrzeni metrycznej ośrodkowej jest ośrodkowa. (po następnym wykładzie)

Zrobić zadanie 1 z listy 3.

Tomasz Downarowicz